

О бикомпактности разностных схем TVDR

А.А. Шестаков

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина», Снежинск, Россия

Введение

За рубежом понятие **предельно компактной аппроксимации** при численном решении ОДУ было введено Крайсом в 1972 году [1, с.190]. Предельно компактной аппроксимацией называется аппроксимация дифференциального уравнения m порядка на $m+1$ узлах разностной сетки.

В России термин **компактные схемы** был введен Толстых А.И. (ЦАГИ) в 1991 году для решения задач аэрогидродинамики [2]. В своей книге Толстых А.И. не дает определение таких схем и компактными схемами называет схемы на трехточечном шаблоне с более высокой точностью, чем обычные многоточечные схемы. В частности, в этой работе была построена схема пятого порядка аппроксимации по пространству. Позже в статье [3] Толстых А.И. дает определение компактных схем как схем, использующих трехточечные шаблоны третьего и более высокого порядка по пространству.

Термин **бикомпактные схемы** на двухточечном шаблоне был введен Калиткиным Н.Н. (ИПМ) в 2008 году для решения одномерного уравнения теплопроводности в работе [4]. В этой работе было предложено три схемы с порядками аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$, $O(\tau^2, h^4)$, $O(\tau^4, h^4)$ и показана устойчивость в L_2 норме. В работе [5] рассмотрено обобщение этих схем на двумерный и трехмерный случаи, но без примеров расчетов. Применение этих схем в двумерном и трехмерном случаях для решения уравнения теплопроводности в литературе мной не найдено.

Исторически первая двухточечная схема для решения одномерных гиперболических уравнений газодинамики была предложена Годуновым С.К. (ИПМ) в 1954 году в его закрытой диссертации [6], а открытая публикация появилась в 1959 году [7]. Это была монотонная схема на двухточечном шаблоне, она имела первый порядок аппроксимации, поэтому её нельзя отнести к классу бикомпактных схем.

В России первая двухточечная схема четвертого порядка аппроксимации по пространству была предложена Петуховым И.В. в 1964 году для решения двумерных течений в пограничном слое [8]. Для повышения порядка аппроксимации им использовались соотношения, связывающие значения в центрах и на гранях разностной ячейки шаблона для искомой функции, её производной и первообразной. Соотношения для искомой функции и её производной получались из разложения в ряд Тейлора. Соотношения для первообразной - по квадратурной формуле Симпсона.

В 2008 году для решения одномерного уравнения теплопроводности в работе [9] группой исследователей из ИПМ были предложены бикомпактные схемы с порядками аппроксимации $O(\tau^2, h^4)$, $O(\tau^3, h^4)$. Ими применялся прием Петухова И.В. использования производной и первообразной в качестве новых переменных, а также квадратурные формулы Симпсона и Маклорена. Показано, что в случае разрывных начальных данных порядок точности этих схем снижается до второго.

Бикомпактные схемы обладают целым рядом преимуществ по сравнению с традиционными многоточечными схемами, поэтому в последнее время им уделяется достаточно большое внимание [10,11,12,13,14,15]. Популярность этого класса объясняется тем, что для данных схем выполняется ряд важных свойств:

1. это самый простой шаблон, поэтому сравнительно просто схемы обобщаются на многомерный случай без расширения шаблона (шаблон трехточечной схемы в двумерной геометрии требует 9 ячеек на регулярной сетке, в трехмерной - 27 ячеек);
2. схемы, записанные в дивергентной форме и построенные интегро-интерполяционным способом в рамках одноячеечного шаблона, будут всегда консервативны;

3. порядок аппроксимации не меняется при переходе от равномерных сеток к неравномерным;
4. легко аппроксимируются граничные условия (не надо вводить фиктивные ячейки на границах);
5. нет необходимости аппроксимировать решение через разрыв, как в многоточечных схемах;
6. легко строится контур консервативности для доказательства локальной консервативности в системе, что важно для разностных уравнений.

TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения

Одним из путей построения схем повышенного порядка аппроксимации с улучшенными монотонными свойствами для решения уравнения переноса является переход к нелинейным схемам TVD (Total Variation Diminishing), начало которым положил В.П. Колган [16]. В настоящее время опубликовано большое количество работ по схемам TVD (смотри, например, [17]). В этих работах рассмотрены как явные, так и неявные схемы TVD для решения гиперболических систем уравнений. Если рассматривать неявные схемы TVD при аппроксимации уравнения переноса, то это будут трехточечные или четырехточечные схемы из-за использования односторонних производных в каждом направлении пространственной переменной. Это значит, что теряется важное достоинство одного из самых эффективных методов решения уравнения переноса – метода дискретных ординат (DS_n) [18], где аппроксимация строится на шаблоне в рамках счетной ячейки, а для решения разностных уравнений используется экономичный метод бегущего счета.

Используемый для решения уравнения переноса метод DS_n предлагает линейные St (Step) и DD (Diamond Difference) схемы, которые со временем стали классическими. Шаговая St схема имеет первый порядок аппроксимации, монотонна и положительна. Алмазная DD схема имеет второй порядок аппроксимации, т.е. бикомпактна, но немонотонна и неположительна. Метод DS_n позволяет строить бикомпактные схемы, если порядок аппроксимации по пространству не ниже второго. Если при отрицательном решении в DD схеме переходить на St схему, то получим нелинейную DD/St схему. Тем не менее, осцилляции в положительной области решения DD/St схемы остаются, точность решения при переключении падает до первого порядка, а переключения с одной схемы на другую могут приводить к медленной сходимости итераций или к их расходимости. По этой причине классические St, DD и DD/St схемы, которые до сих пор используются в переносе нейтронов, в переносе теплового излучения практически не применяются. Для устранения подобных недостатков в схемах DS_n метода применяют механизмы нелинейной коррекции решения. Например, в DDAD схемах (Diamond Difference with the Artificial Dissipation) [19] снимают антидиссипацию DD схемы путем ее вычитания из остаточного члена. При этом аппроксимация остается в рамках одной ячейки, т.е. схема является бикомпактной.

Из-за аппроксимации уравнения переноса с помощью односторонних разностей использование схем TVD для повышения точности не позволяют сохранить свойство бикомпактности. В работе [20] был найден способ, как обойти эти трудности в методологии TVD. Такие схемы в дальнейшем были названы TVDR (Total Variation Diminishing Reconstruction) [21]. Этот способ позволяет сохранить второй порядок аппроксимации с аппроксимацией уравнения переноса на двухточечном шаблоне, т.е. строить бикомпактные схемы.

В работе [20] построена первая из класса TVDR схем – схема MTVDR (Multiplikative Total Variation Diminishing Reconstruction), в которой используется поправочный множитель, получаемый с помощью реконструкции TVD. В работе [22] построена вторая схема ATVDR (Additive Total Variation Diminishing Reconstruction), у которой вся добавка от реконструкции TVD взята с предыдущего шага. В работе [23] проведены исследования шести различных вариантов TVDR схем с использованием спектрального признака Неймана и найдены условия устойчивости с ограничениями на выбор лимитеров TVD.

Рассмотрим построение ATVDR и MTVDR схем при решении линейного уравнение переноса в одномерной плоской геометрии

$$\frac{1}{c} \frac{\partial J}{\partial t} + \mu \frac{\partial J}{\partial x} + \alpha J = 0, \quad (1)$$

где $J(\mu, x, t)$ – неотрицательная функция, μ – направляющий косинус в пространстве полета частиц, x – пространственная координата, t – время, c – скорость света в вакууме, α – некоторая неотрицательная константа. Уравнение (1) дополняется начальными и граничными условиями

$$J^0(\mu, x, t^0) = J^0(\mu, x), \quad J(\mu, x_L, t)|_{\mu > 0} = J_L(\mu, t), \quad J(\mu, x_R, t)|_{\mu < 0} = J_R(\mu, t).$$

Неявная схема в рамках одноклеточного шаблона для уравнения (1) имеет вид

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0, \quad (2)$$

где $\tau = t^{n+1} - t^n$, $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, I$, $n = 0, \dots$.

Для упрощения изложения в дальнейшем предполагается $\tau = \text{const}$, $h = \text{const}$. Аппроксимация по μ не проводится, так как в плоской геометрии переменная μ рассматривается как параметр.

Величины с целыми индексами $J_i^{n+1} = J(\mu, x_i, t^{n+1})$ являются значениями искомой функции в узлах разностной сетки. Значения с полуцелыми индексами

$$J_{i+1/2}^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} J(\mu, x, t^{n+1}) dx$$

являются интегральными средними величинами в ячейке и отличаются от значений в центре ячейки $J(\mu, x_{i+1/2}, t^{n+1})$ на $O(h^m)$ в зависимости от используемой квадратуры, где m – порядок квадратурной формулы.

Уравнение (2) можно записать в более компактном виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad (3)$$

где $q = 1 + c\tau\alpha \geq 1$, $C = \frac{c\tau\mu}{h}$, $\Delta J_i^{n+1} = J_{i+1}^{n+1} - J_i^{n+1}$.

Схема с дополнительными соотношениями связи

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= J_{i+1}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0, \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= J_i^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

является монотонной положительной схемой первого порядка аппроксимации. В теории переноса эта схема называется противопотоковой, а в методе DS_n – схемой St.

Подставляя соотношениями связи (4) в уравнение (3), получаем

$$\begin{aligned} J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q+C} J_{i+1/2}^n + \frac{C}{q+C} J_{i-1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0, \\ J_{i+1/2}^{n+1} &= \frac{1}{q-C} J_{i+1/2}^n - \frac{C}{q-C} J_{i+3/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим построение схем TVD и TVDR на основе схемы St. Для повышения порядка аппроксимации схемы St проведем реконструкцию решения на сеточных интервалах. Представим интенсивность на интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ в кусочно-линейной форме

$$J(x, \mu, t) = J_{i+1/2} + \frac{\partial J_{i+1/2}}{\partial x} (x - x_{i+1/2}), \quad x_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1}).$$

Отсюда следуют реконструированные соотношения связи

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, \quad \mu > 0,$$

$$J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - \frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x} \frac{h}{2}, \quad \mu < 0.$$

В соответствии с методологией TVD в качестве $\frac{\partial J_{i+1/2}^{n+1}}{\partial x}$ берутся некоторые ограничители, которые обычно используют односторонние производные. Если ввести традиционные для схем TVD функции-ограничители, то можно записать соотношениями связи в виде

$$J_{i+1}^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \quad \mu > 0, \quad (6)$$

$$J_i^{n+1} = J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \quad \mu \leq 0,$$

где $\Delta J_{i-1/2} = J_{i+1/2} - J_{i-1/2}$, $\phi_{i+1/2} = \frac{L(\Delta J_{i-1/2}, \Delta J_{i+1/2})}{\Delta J_{i-1/2}} = L(1, \hat{\theta}_{i+1/2})$, $\hat{\theta}_{i+1/2} = \frac{\Delta J_{i+1/2}}{\Delta J_{i-1/2}}$, L - некоторый ограничитель. При $\Delta J_{i-1/2} = 0$ полагаем $\phi_{i+1/2} = 1$, $\hat{\theta}_{i+1/2} = 1$. При $\text{sgn} \Delta J_{i-1/2} \neq \text{sgn} \Delta J_{i+1/2}$ полагаем $\hat{\theta}_{i+1/2} = 0$, поэтому выполняется $\hat{\theta}_{i+1/2} \geq 0$.

Система уравнений с соотношениями связи (6) представляет собой неявную схему TVD с четырехточечным шаблоном на $n+1$ слое:

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{(J_{i+1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1}) - (J_{i-1/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-3/2}^{n+1})}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0 \quad \text{при } \mu > 0,$$

$$\frac{J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^n}{c\tau} + \mu \frac{(J_{i+3/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+3/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1}) - (J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{h} + \alpha J_{i+1/2}^{n+1} = 0 \quad \text{при } \mu \leq 0.$$

Для $\mu > 0$ уравнение переноса расписывается в четырех ячейках ($i-3/2$, $i-1/2$, $i+1/2$, $i+3/2$) (см. рис. 1):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+1/2}^{n+1} - J_{i-1/2}^{n+1} + 0.5L(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1}) - 0.5L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1}) \right] = J_{i+1/2}^n,$$

для $\mu \leq 0$ - в ячейках ($i-1/2$, $i+1/2$, $i+3/2$, $i+5/2$):

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C \left[J_{i+3/2}^{n+1} - J_{i+1/2}^{n+1} - 0.5L(\Delta J_{i+1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+3/2}^{n+1}) + 0.5L(\Delta J_{i-1/2}^{n+1}, \Delta J_{i+1/2}^{n+1}) \right] = J_{i+1/2}^n.$$

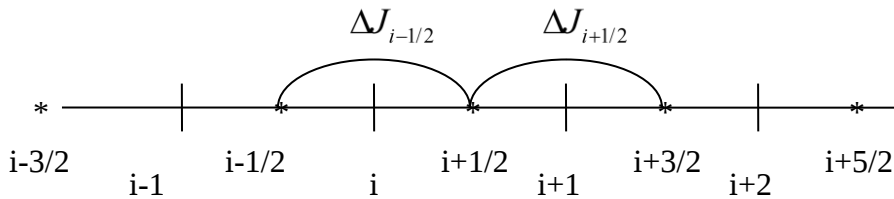


Рисунок 1 – Шаблон разностной схемы

Разностные уравнения можно записать в более компактном виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^{n+1}\Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^{n+1} = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1} - 0.5\phi_{i-1/2}^{n+1}\theta_{i-1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu > 0, \quad (7)$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CH_{i+1/2}^{n+1}\Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^{n+1} = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^{n+1} + 0.5\phi_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i+1/2}^{n+1} \quad \text{при } \mu \leq 0,$$

$$\text{где } \phi_{i-1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}, \quad \theta_{i-1/2}^{n+1} = \frac{\Delta J_{i-3/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}, \quad \phi_{i+1/2}^{n+1}\theta_{i+1/2}^{n+1} = \frac{L(\Delta J_{i-3/2}^{n+1}, \Delta J_{i-1/2}^{n+1})}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}}.$$

Из этих уравнений видно, что аппроксимация неявной схемой TVD в четырех точках на $n+1$ -ом шаге не позволяет построить бикомпактную схему и использовать алгоритм бегущего счета.

Чтобы построить бикомпактную схему будем брать разности решения в узлах для функций-ограничителей с предыдущего шага ΔJ_i^n и представлять их в виде

самостоятельных функций по аналогии с пространственными производными $\frac{\partial J_i^n}{\partial x}$. Бикомпактные схемы позволяют использовать производные искомых величин. Самое простое – это взять коэффициенты А и Н в системе уравнений (7) с предыдущего шага:

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CA_{i-1/2}^n \Delta J_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^n = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \text{ при } \mu > 0,$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + CH_{i+1/2}^n \Delta J_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^n = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^n + 0.5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \text{ при } \mu \leq 0.$$

В этом случае получаем аппроксимацию уравнения переноса на шаблоне из двух точек на $n+1$ -ом шаге, которая позволяет построить бикомпактную схему, но, как легко проверить, данная схема неконсервативна.

Если систему уравнений (7) записать в следующем виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i-1/2}^{n+1} + C[(A-1)\Delta J]_{i-1/2}^n = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^n = 1 + 0.5\phi_{i+1/2}^n - 0.5\phi_{i-1/2}^n \theta_{i-1/2}^n \text{ при } \mu > 0,$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C\Delta J_{i+1/2}^{n+1} + C[(H-1)\Delta J]_{i+1/2}^n = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^n = 1 - 0.5\phi_{i+3/2}^n + 0.5\phi_{i+1/2}^n \theta_{i+1/2}^n \text{ при } \mu \leq 0,$$

то получаем аддитивную TVDR схему (ATVDR). Схема ATVDR является бикомпактной с выбором функций-ограничителей в рамках одной ячейки и не теряет свойство консервативности. При бегущем счете вычисляются функции-ограничители во всех узлах для следующего шага.

Если систему уравнений (7) записать в виде

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(A\Delta J)_{i-1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad A_{i-1/2}^{n+1} = \frac{(D^+)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1} - (D^+)_{i-1/2}^n J_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i-1/2}^{n+1}} \text{ при } \mu > 0,$$

$$qJ_{i+1/2}^{n+1} + C(H\Delta J)_{i+1/2}^{n+1} = J_{i+1/2}^n, \quad H_{i+1/2}^{n+1} = \frac{(D^-)_{i+3/2}^n J_{i+3/2}^{n+1} - (D^-)_{i+1/2}^n J_{i+1/2}^{n+1}}{\Delta J_{i+1/2}^{n+1}} \text{ при } \mu \leq 0,$$

то получаем мультипликативную TVDR схему (MTVDR). Схема консервативна и позволяет использовать алгоритм бегущего счета. Хотя шаблон схемы MTVDR совпадает с шаблоном схемы ATVDR аппроксимация уравнения переноса разная.

Использование ограничителей с предыдущего шага в схемах TVDR приводит к появлению ограничений на шаг по времени. В работе [23] показано, что условия устойчивости для неявных TVDR схем накладывают требования на выбор ограничителей и зависят от числа Куранта, что приводит к ограничениям временного шага.

Заключение

Основной вопрос, который рассматривается в этой работе – являются ли схемы TVDR бикомпактными? Схемы TVDR являются нелинейными, т.к. корректирующие добавки зависят от решений на предыдущем шаге по времени. На искомом временном шаге используются величины в центрах и узлах ячейки разностной сетки, а с предыдущего шага дополнительно привлекаются их производные в узлах этой же ячейки. Если применение односторонних производных в TVD реконструкции можно свести к двухточечному использованию функций-ограничителей, то схемы TVDR можно считать бикомпактными.

По результатам данной работы можно сформулировать новое определение TVDR схем. Схематически TVDR называются неявные нелинейные бикомпактные разностные схемы,

использующие TVD реконструкцию для повышения точности расчетов на двухточечном сеточном шаблоне.

В заключении можно сформулировать следующие выводы.

1. **Бикомпактность по пространству** на искомом временном шаге позволяет при решении СУПТИ пользоваться экономичными численными методами (например, маршевыми алгоритмами: прогонкой или бегущим счетом).
2. **Трехточечный шаблон** на предыдущем шаге из-за использования односторонних производных в TVD реконструкции можно свести к двухточечному с помощью представления функций-ограничителей как самостоятельных величин в узлах сетки.
3. Разностная дискретизация TVDR схем **консервативна, положительна и устойчива** при выполнении определенных условий на выбор функций-ограничителей.

Литература

-
- ¹ Дж. Холл. Современные численные методы решения ОДУ. М.: Мир, 1979. 312 с.
 - ² Толстых А.И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1991. 230 с.
 - ³ Толстых А.И., Д.А. Ширококов. О разностных схемах с компактными аппроксимациями пятого порядка для пространственных течений вязкого газа. – ЖВМ и МФ, 1996, т.36, № 4, с. 71-85.
 - ⁴ Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. Бикомпактные схемы и слоистые среды. ДАН, 2008, т.419, №6, с.744-748.
 - ⁵ Н.Н. Калиткин, П.В. Корякин. Одномерные и двумерные бикомпактные схемы в слоистых средах. ММ, 2009, т.21, №8, с.44-62.
 - ⁶ С.К. Годунов. Воспоминания о разностных схемах. Н.: Научная книга, 1997. 29 с.
 - ⁷ С.К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Математический сборник, 1959, т.47, №3, с.271-306.
 - ⁸ И.В. Петухов. В сб.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Изд-во АН СССР, 1964. С.304-325.
 - ⁹ Б.В. Рогов, М.Н. Михайловская. О сходимости компактных разностных схем. ММ, 2008, т.20, №1, с.99-116.
 - ¹⁰ Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа. ДАН, 2011, т.440, №2, с.172-177.
 - ¹¹ Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа. ЖВМ и МФ, 2012, т.52, №4, с.672-695.
 - ¹² Брагин М.Д., Рогов Б.В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа. ЖВМ и МФ, 2016, т.56, №6, с.958-972.
 - ¹³ Брагин М.Д., Рогов Б.В. Консервативная монотонизация бикомпактных схем. Препринт ИПМ №8, 2019.
 - ¹⁴ Брагин М.Д. Явно-неявные бикомпактные схемы для уравнений гиперболических систем законов сохранения. ММ, 2022, т.34, №6, с.3-21.
 - ¹⁵ Брагин М.Д. Бикомпактные схемы для уравнений Навье-Стокса в случае сжимаемой жидкости. ДАН, 2023, т.509, с.17-22.
 - ¹⁶ В.П. Колган. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики. Уч. Зап. ЦАГИ, №6, С. 68-77, 1972.
 - ¹⁷ А. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. J. Comput. Phys., 49:357-393, 1983.
 - ¹⁸ Карлсон Б. Численное решение задачи кинетической теории нейтронов. В кн.: Теория ядерных реакторов. - М.: Атомиздат, 1963. С. 243-258.

¹⁹ Гаджиев А.Д., Кондаков И.А., Шестаков А.А., Стародумов О.И., Писарев В.Н. Метод дискретных ординат с искусственной диссипацией (DDAD-схема) для численного решения уравнения переноса нейтронов. ВАНТ, серия «Математическое моделирование физических процессов», 2003, в.4, с.13-24.

²⁰ Гаджиев А.Д., Завьялов В.В., Шестаков А.А. Применение TVD подхода к DS_n методу решения уравнения переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2009. Вып. 2. С.37-48.

²¹ Шестаков А.А. TVDR схемы для решения системы уравнений переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2019. Вып. 2. С.17-36.

²² Гаджиев А.Д., Кошутин Д.А., Шестаков А.А. Метод дискретных ординат с TVD - реконструкцией и синтетический метод ускорения итераций для численного решения уравнения переноса теплового излучения. //ВАНТ. 2013. Вып. 3. С.3-15.

²³ Шестаков А.А. Об устойчивости разностных схем TVDR для решения одномерного уравнения переноса излучения. //ВАНТ. 2023. Вып. 1. С.16-28.